

Глава XIII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекции 51–52

§ 59. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

59.1. Основные понятия

Бесконечные ряды широко используются в теоретических исследованиях математического анализа, имеют разнообразные практические применения.

⇒ **Числовым рядом** (или просто *рядом*) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (59.1)$$

где $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — действительные или комплексные числа, называемые **членами ряда**, u_n — **общим членом** ряда.

Ряд (59.1) считается заданным, если известен общий член ряда u_n , выраженный как функция его номера n : $u_n = f(n)$.

⇒ Сумма первых n членов ряда (59.1) называется n -й **частичной суммой** ряда и обозначается через S_n , т. е. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots$$

⇒ Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (59.1), то этот предел называют **суммой ряда** (59.1) и говорят, что ряд **сходится**. Записывают: $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд (59.1) называют **расходящимся**. Такой ряд суммы не имеет.

Рассмотрим примеры.

1. Ряд $2 + 17 - 3\frac{1}{4} + 196 + \dots$ нельзя считать заданным, а ряд $2 + 5 + 8 + \dots$ — можно: его общий член задается формулой $u_n = 3n - 1$.

2. Ряд $0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$ сходится, его сумма равна 0.

3. Ряд $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ расходится, $S_n = n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

4. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расходится, так как последовательность частичных сумм $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ ($S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \dots$) не имеет предела.

5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Действительно,

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

.....,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

т. е. ряд сходится, его сумма равна 1.

Рассмотрим некоторые важные свойства рядов.

Свойство 1. Если ряд (59.1) сходится и его сумма равна S , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots, \quad (59.2)$$

где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS . Если же ряд (59.1) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (59.2) расходится.

□ Обозначим n -ю частичную сумму ряда (59.2) через $S_n^{(u)}$. Тогда

$$S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = c \cdot S_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)} = \lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c \cdot S,$$

т. е. ряд (59.2) сходится и имеет сумму cS .

Покажем теперь, что если ряд (59.1) расходится, $c \neq 0$, то и ряд (59.2) расходится. Допустим противное: ряд (59.2) сходится и имеет сумму S_1 . Тогда

$$S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)} = \lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Отсюда получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{c},$$

т. е. ряд (59.1) сходится, что противоречит условию о расходимости ряда (59.1). ■

Свойство 2. Если сходится ряд (59.1) и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad (59.3)$$

а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n), \quad (59.4)$$

причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

□ Обозначим n -е частичные суммы рядов (59.1), (59.3) и (59.4) через $S_n^{(u)}$, $S_n^{(v)}$ и S_n соответственно. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)} \pm \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(v)} = S_1 \pm S_2,$$

т. е. каждый из рядов (59.4) сходится, и сумма его равна $S_1 \pm S_2$ соответственно. ■

☉ Из свойства 2 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

В справедливости этого утверждения можно убедиться методом от противного.

Заметим, что сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду (59.1) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (59.1) сходятся или расходятся одновременно.

□ Обозначим через S сумму отброшенных членов, через k — наибольший из номеров этих членов. Чтобы не менять нумерацию оставшихся членов ряда (59.1), будем считать, что на месте отброшенных членов поставили нули. Тогда при $n > k$ будет выполняться равенство $S_n - S'_n = S$, где S'_n — это n -я частичная сумма ряда, полученного из ряда (59.1) путем отбрасывания конечного числа членов. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S + \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n$. Отсюда следует, что пределы в левой и правой частях одновременно существуют или не существуют, т. е. ряд (59.1) сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов.

Аналогично рассуждаем в случае приписывания к ряду конечного числа членов. ■

Ряд
$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad (59.5)$$

называется n -м *остатком ряда* (59.1). Он получается из ряда (59.1) отбрасыванием n первых его членов. Ряд (59.1) получается из остатка

добавлением конечного числа членов. Поэтому, согласно свойству 3, ряд (59.1) и его остаток (59.5) одновременно сходятся или расходятся.

☉ Из свойства 3 также следует, что если ряд (59.1) сходится, то его остаток $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

59.2. Ряд геометрической прогрессии

Исследуем сходимость ряда

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0), \quad (59.6)$$

который называется *рядом геометрической прогрессии*. Ряд (59.6) часто используется при исследовании рядов на сходимость.

Как известно, сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$, $q \neq 1$. Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1 - q}.$$

Рассмотрим следующие случаи в зависимости от величины q :

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$, ряд (59.6) сходится, его сумма равна $\frac{a}{1 - q}$;

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, ряд (59.6) расходится;

3. Если $|q| = 1$, то при $q = 1$ ряд (59.6) принимает вид $a + a + a + \dots + a + \dots$, для него $S_n = n \cdot a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (59.6) расходится; при $q = -1$ ряд (59.6) принимает вид $a - a + a - a + \dots$ — в этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n . Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, ряд (59.6) расходится.

☞ Итак, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример 59.1. Показать, что ряд $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-3}} + \dots$ сходится.

○ Решение: Данный ряд можно переписать так:

$$2^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$$

Как видно, он представляет собой ряд геометрической прогрессии с $a = 2^3$ и $q = \frac{1}{2} < 1$. Этот ряд сходится согласно свойству 1 числовых рядов. ●

59.3. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд

Нахождение n -й частичной суммы S_n и ее предела для произвольного ряда во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные *признаки сходимости*. Первым из них, как правило, является необходимый признак сходимости.

Теорема 59.1. Если ряд (59.1) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

□ Пусть ряд (59.1) сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Тогда и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ (при $n \rightarrow \infty$ и $(n-1) \rightarrow \infty$). Учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

Следствие 59.1 (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

□ Действительно, если бы ряд сходиллся, то (по теореме) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Но это противоречит условию. Значит, ряд расходится. ■

Пример 59.2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$.

○ Решение: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$ расходится, т. к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0,$$

т. е. выполняется достаточное условие расходимости ряда. ●

Пример 59.3. Исследовать сходимость ряда

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \dots$$

○ Решение: Данный ряд расходится, т. к. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. ●

Теорема 59.1 дает необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное: из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ не следует, что ряд сходится. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

В качестве примера рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (59.7)$$

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Однако ряд (59.7) расходится. Покажем это.

□ Как известно (см. (17.14)), $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Отсюда следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$. Логарифмируя это неравенство по основанию e , получим:

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1,$$

т. е.

$$\frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n}, \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Подставляя в полученное неравенство поочередно $n = 1, 2, \dots, n-1, n$, получим:

$$\begin{aligned} 1 &> \ln 2, \\ \frac{1}{2} &> \ln 3 - \ln 2, \\ \frac{1}{3} &> \ln 4 - \ln 3, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{1}{n} &> \ln(n+1) - \ln n. \end{aligned}$$

Сложив почленно эти неравенства, получим $S_n > \ln(n+1)$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т. е. гармонический ряд (59.7) расходится. ■

В качестве второго примера можно взять ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако этот ряд расходится.

□ Действительно,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n},$$

т. е. $S_n > \sqrt{n}$. Следовательно, $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, ряд расходится. ■

§ 60. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЯДОВ

Необходимый признак сходимости не дает, вообще говоря, возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью так называемых *достаточных признаков*.

☞ Рассмотрим некоторые из них для *знакоположительных* рядов, т. е. рядов с неотрицательными членами (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения его на (-1) , что, как известно, не влияет на сходимость ряда).

60.1. Признаки сравнения рядов

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с другим («эталонным») рядом, о котором известно, сходится он или нет. В основе такого сравнения лежат следующие теоремы.

Теорема 60.1. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (60.1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (60.2)$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \leq v_n, \quad (60.3)$$

то из сходимости ряда (60.2) следует сходимость ряда (60.1), из расходимости ряда (60.1) следует расходимость ряда (60.2).

Замечание. Теорема 60.1 справедлива и в том случае, когда неравенство (60.3) выполняется не для всех членов рядов (60.1) и (60.2), а начиная с некоторого номера N . Это вытекает из свойства 3 числовых рядов (см. п. 59.1).

Теорема 60.2 (предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда (60.1) и (60.2). Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ ($0 < A < \infty$), то ряды (60.1) и (60.2) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 60.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$.

○ Решение: Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится ($q = \frac{1}{2} < 1$). Имеем $\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}$. Следовательно, данный ряд сходится. ●

Пример 60.2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

○ Решение: Здесь $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Возьмем ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$, который расходится (гармонический ряд). Имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд расходится. ●

Пример 60.3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5n}$.

○ Решение: Применим предельный признак сравнения. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5} \neq 0$ (см. пример 17.7), то по теореме 60.2 исходный ряд расходится, как сравнимый с гармоническим рядом. ●

60.2. Признак Даламбера

В отличие от признаков сравнения, где все зависит от догадки и запаса известных сходящихся и расходящихся рядов, признак Даламбера (1717–1783, французский математик) позволяет часто решить вопрос о сходимости ряда, проделав лишь некоторые операции над самим рядом.

Теорема 60.3. Пусть дан ряд (59.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Замечания.

1. Если $l = 1$, то ряд (59.1) может быть как сходящимся, так и расходящимся.

2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n .

Пример 60.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

○ Решение: Находим

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится. ●

Пример 60.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

○ Решение: Вычисляем

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{3^n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n^2}{3^n \cdot (n+1)^2} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = 3. \end{aligned}$$

Так как $l = 3 > 1$, то данный ряд по признаку Даламбера расходится. ●

60.3. Радикальный признак Коши

Иногда удобно пользоваться *радикальным признаком Коши* для исследования сходимости знакоположительного ряда. Этот признак во многом схож с признаком Даламбера, о чем говорят его формулировка и доказательство.

Теорема 60.4. Пусть дан ряд (59.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Как и для признака Даламбера, в случае, когда $l = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым. Доказательство теоремы аналогично доказательству признака Даламбера. Поэтому опустим его.

Пример 60.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

○ Решение: Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то применим радикальный признак Коши к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Вычисляем

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e} < 1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд, согласно свойству 1 числовых рядов. ●

60.4. Интегральный признак Коши. Обобщенный гармонический ряд

Теорема 60.5. Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots$, то:

1) если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и ряд (59.1);

2) если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то расходится также и ряд (59.1).

Пример 60.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

○ Решение: Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ удовлетворяет условиям теоремы 60.5. Находим

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| \Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Значит, ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{x \ln x}$ расходится. ●

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots, \quad (60.8)$$

где $p > 0$ — действительное число, называется *обобщенным гармоническим рядом*. Для исследования ряда (60.8) на сходимость применим интегральный признак Коши (признаки Даламбера и Коши ответа о сходимости не дают).

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$ и $f(n) = \frac{1}{n^p} = u_n$. При $p \neq 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x^{-p} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^a = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } p < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

☞ При $p = 1$ имеем гармонический ряд $u_n = \frac{1}{n}$, который расходится (второй способ: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$). Итак, ряд (60.8) сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$. В частности, ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ сходится (полезно знать).

Рассмотренные признаки сходимости (есть и другие) знакоположительных рядов позволяют судить о сходимости практически любого положительного ряда. Необходимые навыки приобретаются на практике.